

平衡超立方体的故障容错性

张欣欣^{1,2}, 许力^{1,2}, 林丽美^{1,2,3}

- (1. 福建师范大学数学与计算机科学学院, 福建 福州 350007;
2. 福建省网络安全与密码技术重点实验室, 福建 福州 350007;
3. 福建农林大学计算机信息学院, 福建 福州 350002)

摘要: 故障容错是衡量多处理器互连网络可靠性的重要方式之一。其中 g -限制边连通度和 g -限制连通度保证了剩下每个分支之间不连通且每个分支中节点的邻居数目不少于 g , 能够更加精准地测量多处理器和多信道系统的容错性和可靠性。平衡超立方体是超立方体的一个变形, 它特有的良好拓扑性质能够更好地满足多处理器系统和多种新型网络的需要。提出了 n 维平衡超立方体的 $\{1,2\}$ -限制边连通度和 $\{1,2\}$ -限制连通度, 能够丰富以平衡超立方体为拓扑结构的网络容错性和可靠性的评价体系, 并为平衡超立方体的故障诊断算法打下良好基础。

关键词: 故障容错性; 限制连通度; 限制边连通度; 平衡超立方体

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

doi: 10.11959/j.issn.2096-109x.2017.00193

Fault tolerance of balanced hypercubes

ZHANG Xin-xin^{1,2}, XU Li^{1,2}, LIN Li-mei^{1,2,3}

- (1. School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350007, China;
2. Fujian Provincial Key Laboratory of Network Security and Cryptology, Fuzhou 350007, China;
3. College of Computer and Information Science, Fujian Agriculture and Forestry University, Fuzhou 350002, China)

Abstract: Fault tolerance is one of the important ways to measure the reliability of multiprocessor interconnection networks. g -restricted edge connectivity and g -restricted connectivity can ensure every remaining component is disconnected, the number of neighbors of vertex is no less than g , which can measure the fault tolerance and reliability of multiprocessor and multichannel system more accurately. Balanced hypercubes is a variant of the hypercube, which has some specific topological properties, it can better meet the needs of the multiprocessor system and many new networks. The $\{1,2\}$ -restricted edge connectivity and the $\{1,2\}$ -restricted connectivity of balanced hypercubes were proposed, which could enrich the evaluation system of network fault tolerance and reliability in balanced hypercubes topology and it laid a good foundation for the fault diagnosis algorithm of balanced hypercube.

Key words: fault tolerance, restricted connectivity, restricted edge-connectivity, balanced hypercubes

收稿日期: 2017-06-15; 修回日期: 2017-08-17。通信作者: 许力, Xuli@fjnu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.61771140, No.U1405255, No.61702100); 福州市科技局基金资助项目 (No.2015-G-59); 福建省高校产学研合作科技重大基金资助项目 (No.2017H6005); 福建省教育厅基金资助项目 (No.JAT160123); 中国博士后面上基金资助项目 (No.2017M612107)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.61771140, No.U1405255, No.61702100), Fuzhou Science and Technology Bureau Project (No.2015-G-59), University Industry Cooperation of Major Science and Technology Project of Fujian Province (No.2017H6005), Fujian Provincial Education Department Project (No.JAT160123), Post-doctoral Science Foundation of China (No.2017M612107)

1 引言

云计算数据中心网络^[1]、复杂网络^[2]和社交网络^[3]等都以互连网络为拓扑结构进行一系列相关安全和优化问题研究。在并行计算系统中，处理器都是基于特定的网络连接。通常用一个图来模拟一个互连网络，图的顶点对应处理器，图的边对应网络的通信连接。用 G 表示一个简单无向图， $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别代表图 G 的点集和边集。用 $|V(G)|$ 和 $|E(G)|$ 分别表示 G 中点和边的个数^[4]。

连通度和边连通度都是网络容错性的重要度量参数，图 G 的连通度 $\kappa(G)$ ($\lambda(G)$) 指的是使 $G-F$ 不连通的 G 的最小点集 F (边集 F) 的基数^[2]。 $\kappa(G)$ 越大， G 的可靠性越高。

连通度 (边连通度) 测量容错性有 3 个明显的缺陷：① 2 个网络的连通度 (或边连通度) 即使相同，它们的可靠性也不一定一样，因为它们的最小点割 (或最小边割) 故障概率可能不同；② 连通度 (边连通度) 不能准确地反映由于处理机 (或通信信道) 损坏造成的系统损坏程度；③ 在分析和应用这 2 个参数时，本文不言而喻地假定了系统的任何部件都可能同时失灵^[4]。为了弥补以上缺陷，人们对传统的连通度 (边连通度) 概念加以推广，以适应网络容错性分析的需要。本文研究的限制边连通度和限制连通度就是连通度和边连通度的推广。

对于任意非负整数 g ，图 G 的 g -限制边连通度是指使 $G-S$ 不连通的每个分支中每个点的度数至少为 g 最小边集 S 的基，如果任何点 $v \in V(G)$ 的邻边集都不是 S 的子集，且 $G-S$ 不连通，则 S 是限制边割集，如果 G 中存在限制边割，则限制边连通度为 $\lambda^{(g)}(G) = \min\{|S| : S \text{ 是一个限边割集}\}$ 。类似地，图 G 的 g -限制连通度使 $G-F$ 不连通的每个分支的点的度数至少为 g 的最小顶点子集 F 的基数^[5]。如果任何点 $v \in V(G)$ 的邻点集都不是 F 的子集且 $G-F$ 不连通，子集 F 称为限制割。若 G 中存在限制割，则定义限制连通度 $\kappa^{(g)}(G) = \min\{|F| : F \text{ 是 } G \text{ 的一个限制割}\}$ ^[6]。近年来，限制边连通度和限制连通度一直在各种互连网络环境中被广泛研究。Lin 等^[7-9]分别研究了分裂星图的限制连通度和 (n, k) 排列图的条件连通度以及分层立方网络的可靠性，Zhou 等^[10,11]分别提出了对偶立方体和排列图的限制连

通度和条件容错性，Zhu 等^[12]研究了超立方体和折叠超立方体的限制边连通度和限制连通度，Pan 等^[13]研究了笛卡尔乘积图的限制连通度，Wang 等^[14]研究了完全对换网络的限制连通度，马强等^[15]研究了交换交叉立方网络的可靠性，Xu 等^[16,17]研究了 De Bruijn 网络和点可迁图的限制边连通度。

超立方体被称为并行计算系统中最流行的互连网络拓扑结构之一，Bhuyan^[18]提出了各种性能优良的超立方体网络的变形，经过多年的发展，新型互连网络已经提出一系列的拓扑结构，包括折叠立方网络、交叉立方网络、交换立方网络、分层立方网络和平衡超立方网络等。由 Wu 和 Huang^[19]提出的平衡超立方体增强了超立方体的一些性质。平衡超立方体中每个点都有一个与自己邻点相同的匹配节点，故在平衡超立方网络中一个故障节点的运行任务可以转化给它的匹配节点完成^[20]。迄今为止，平衡超立方体的容错性与可靠性研究尚未求出。

因此，本文研究的是 n 维平衡超立方体 BH_n 的限制边连通度和限制连通度，能够更加精确地分析以平衡超立方体为模型的互连网络的容错性与可靠性。对于维护复杂网络和数据中心网络环境的安全可靠性能有着重要的意义。

2 平衡超立方体的定义与性质

平衡超立方体的定义由 Wu 和 Huang^[19]用 2 种方式提出。

定义 1 一个 n 维平衡超立方体包含 2^{2n} 个点 $(a_0, \dots, a_{i-1}, a_i, \dots, a_{n-1})$ ，其中 $a_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ($0 \leq i \leq n-1$)。对于 BH_n 中任意一个点 $v = (a_0, \dots, a_{i-1}, a_i, \dots, a_{n-1})$ ，有如下 $2n$ 个邻点。

$$\begin{aligned} &((a_0 + 1) \bmod 4, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}), \\ &((a_0 - 1) \bmod 4, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}), \\ &((a_0 + 1) \bmod 4, \dots, a_{i-1}, (a_i + (-1)^{a_0}) \bmod 4, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}), \\ &((a_0 - 1) \bmod 4, \dots, a_{i-1}, (a_i + (-1)^{a_0}) \bmod 4, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}). \end{aligned}$$

图 1 是一维平衡超立方体和二维平衡超立方体的结构图。

定义 2 BH_n 可以递推构造如下。

1) BH_n 是一个长度为 4 的圈，它的每个顶点分别用 0, 1, 2, 3 标记。

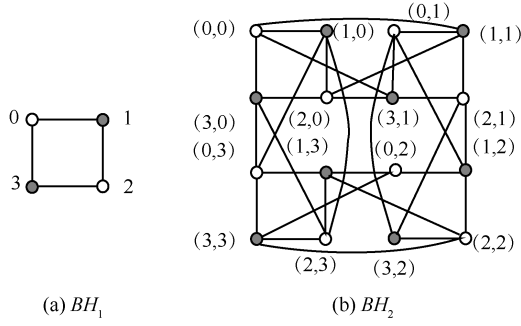


图1 一维和二维平衡超立方体结构

2) BH_{k+1} 由 4 个 BH_k 构成, 这 4 个 BH_k 分别标记为 $BH_k^{(0)}$ 、 $BH_k^{(1)}$ 、 $BH_k^{(2)}$ 、 $BH_k^{(3)}$, 记 $BH_n = BH_{n-1}^{(0)} \otimes BH_{n-1}^{(1)} \otimes BH_{n-1}^{(2)} \otimes BH_{n-1}^{(3)}$, 其中 $BH_k^{(i)}$ ($0 \leq i \leq 3$) 中每个点的第 k 个坐标都由 i 表示。 $BH_k^{(i)}$ 中的每个顶点 $v = (a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, i)$ 都有 2 个外邻点。

① 如果 a_0 为偶数, 则 2 个外邻点是在 $BH_k^{(i+1)}$ 的 $((a_0 + 1) \bmod 4, a_1, \dots, a_{k-1}, (i+1) \bmod 4)$ 和 $((a_0 - 1) \bmod 4, a_1, \dots, a_{k-1}, (i+1) \bmod 4)$ 。

② 如果 a_0 为奇数, 则 2 个外邻点是在 $BH_k^{(i+1)}$ 的 $((a_0 + 1) \bmod 4, a_1, \dots, a_{k-1}, (i-1) \bmod 4)$ 和 $((a_0 - 1) \bmod 4, a_1, \dots, a_{k-1}, (i-1) \bmod 4)$ 。

为了提出 BH_n 的限制边连通度和限制连通度, 需要用到以下引理。

引理 1^[19] 在 n 维平衡超立方体 BH_n 中任意 2 个顶点之间存在 $2n$ 个点不交的路径, 所以, 当 $n \geq 2$ 时, $\kappa(BH_n) = \lambda(BH_n) = 2n$ 。

引理 2^[21] 当 $n \geq 2$, BH_n 是点可迁的也是边可迁的。

引理 3^[21] BH_n 是一个负载平衡图, 它的节点可以分割成匹配集, 每组匹配都有相同的邻点集。

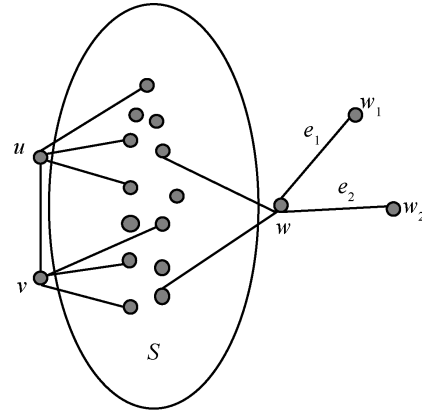
3 平衡超立方体的限制边连通度

限制边连通度是指图 G 删去边子集 S , 使每个分支不连通且没有孤立点的最小边数的基数。本节介绍 BH_n 的 1-限制边连通度和 2-限制边连通度。

定理 1 n 维平衡超立方体 BH_n 的 1-限制边连通度为 $\lambda^{(1)}(BH_n) = 4n - 2$ ($n \geq 2$)。

证明 如图 2 所示, 在 BH_n 中任取一边 $e = (u, v)$ 。令 S 为 e 的邻边集, 设 $u = (0, a_1, \dots,$

$a_{i-1}, \dots, 0) \in BH_{n-1}^{(0)}$, $v = (1, a_1, \dots, a_{i-1}, \dots, 0) \in BH_{n-1}^{(0)}$, 则 e 的邻点为 $(3, a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, 0)$, $(2, a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, 0)$, $(0, a_1, \dots, a_{i-1}, (a_i - 1) \bmod 4, a_{i+1}, \dots, 0)$, $(2, a_1, \dots, a_{i-1}, (a_i - 1) \bmod 4, a_{i+1}, \dots, 0)$, $(1, a_1, \dots, a_{i-1}, (a_i + 1) \bmod 4, a_{i+1}, \dots, 0)$, $(3, a_1, \dots, a_{i-1}, (a_i + 1) \bmod 4, a_{i+1}, \dots, 1)$, 外邻点分别是 $(3, a_1, \dots, a_{k-1}, 1)$, $(1, a_1, \dots, a_{k-1}, 1)$, $(2, a_1, \dots, a_{k-1}, 3)$, $(0, a_1, \dots, a_{k-1}, 3)$, 所以得到 $|S| = 4n - 2$, $BH_n - S$ 不连通且没有孤立点, 否则, 若 $BH_n - S$ 有孤立点设为 $w = (1, a_1, \dots, a_{k-1}, 3)$, 因为 w 是孤立的, 则 w 在 $BH_n - S$ 中没有邻边, 也就是说 w 的所有邻边都在 S 中, 但由定义 2 可知 w 的 2 个外邻点分别为 $w_1 = (0, a_1, \dots, a_{k-1}, 2)$ 和 $w_2 = (2, a_1, \dots, a_{k-1}, 2)$, 显然得到, $e_1(w, w_1) \notin S$ 且 $e_2(w, w_2) \notin S$, 矛盾。所以, $\lambda^{(1)}(BH_n) \leq |S| = 4n - 2$ 。

图2 e_1, e_2 都不在 S 中

引理 4^[22] 任取一个故障边集 $F \in E(BH_n)$, 当 $|F| \leq 4n - 3$ 时, 则:

- 1) $BH_n - F$ 连通;
- 2) $BH_n - F$ 包含两部分, 其中一部分是一个孤立点, 此时 $BH_n - F$ 是连通的。

由引理 4 可得, $\lambda^{(1)}(BH_n) \geq 4n - 2$, 所以得到 $\lambda^{(1)}(BH_n) = 4n - 2$ ($n \geq 2$)。

定理 2 n 维平衡超立方体 BH_n 的 2-限制边连通度的上界为 $\lambda^{(2)}(BH_n) \leq 8n - 8$ ($n \geq 2$)。

证明 如图 3 所示, 任取一个长为 4 的圈 C , $C = u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow u_3 \rightarrow u_4 \rightarrow u_1$, 设 S 为圈 C 的邻边集, 由引理 1 得 $|S| = 4(2n - 2) = 8n - 8$ 。与定理 1 类似可得, $BH_n - S$ 不连通且没有孤立点, 所以 $\lambda^{(2)}(BH_n) \leq |S| = 8n - 8$ 。

4 平衡超立方体的限制连通度

限制连通度是指删去图 G 的子集 F 使每个分支不连通且没有孤立点的最小点集 F 的基数。本节介绍了 BH_n 的 1-限制连通度与 2-限制连通度, 并可证明大小相等均为 $4n-4$ 。

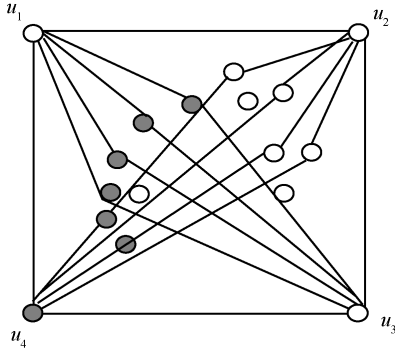


图3 圈 C 的邻边集

定理 3 n 维平衡超立方体 BH_n 的 1-限制连通度为 $\kappa^{(1)}(BH_n) = 4n-4$ ($n \geq 2$)。

证明 在 BH_n 中任取一边 uv 。令 $S = N_{BH_n}(uv)$, 设 $u = (0, a_1, \dots, a_{i-1}, \dots, 0) \in BH_{n-1}^{(0)}$, $v = (1, a_1, \dots, a_{i-1}, \dots, 0) \in BH_{n-1}^{(0)}$, 由定义 1 得边 uv 的内邻点为 $(3, a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, 0)$, $(2, a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, 0)$, $(0, a_1, \dots, a_{i-1}, (a_i-1) \bmod 4, a_{i+1}, \dots, 0)$, $(2, a_1, \dots, a_{i-1}, (a_i-1) \bmod 4, a_{i+1}, \dots, 0)$, $(1, a_1, \dots, a_{i-1}, (a_i+1) \bmod 4, a_{i+1}, \dots, 0)$, $(3, a_1, \dots, a_{i-1}, (a_i+1) \bmod 4, a_{i+1}, \dots, 0)$, 由定义 2, 得到边 uv 的外邻点分别为 $(1, a_1, \dots, a_{k-1}, 1)$, $(3, a_1, \dots, a_{k-1}, 1)$, $(2, a_1, \dots, a_{k-1}, 3)$, $(0, a_1, \dots, a_{k-1}, 3)$, 所以 $|S| = 4n-2$ 。假设 $BH_n - S$ 有孤立点 w , 令 $w = (1, a_1, \dots, a_{k-1}, 3)$, 因为 w 是孤立的, 则 w 在 $BH_n - S$ 中没有邻点, 也就是说 w 的所有邻点都在 S 中, 但由定义 2 得到 w 的 2 个外邻点分别为 $w_1 = (0, a_1, \dots, a_{k-1}, 2)$ 和 $w_2 = (2, a_1, \dots, a_{k-1}, 2)$, 显然, $w_1 \notin S$ 且 $w_2 \notin S$, 推出矛盾。所以, $BH_n - S$ 是不连通的且没有孤立点。故 $\kappa^{(1)}(BH_n) \leq |S| = 4n-2$, 但是, $\kappa^{(1)}(BH_n) \leq 4n-2$ 并不是紧致的, 比如说, 再取 uv 为 $u = (2, a_1, \dots, a_{i-1}, \dots, 0) \in BH_{n-1}^{(0)}$, $v = (3, a_1, \dots, a_{i-1}, \dots, 1) \in BH_{n-1}^{(1)}$, 或者分别取 $u = (1, a_1, \dots, a_{i-1}, \dots, 3) \in BH_{n-1}^{(3)}$, $v = (0, a_1, \dots, a_{i-1}, \dots, 2) \in BH_{n-1}^{(2)}$ 时, $|S| = 4n-4$, 当 $n \geq 2$ 时, $(4n-4) < (4n-2)$, 由

限制连通度的定义可知, $\kappa^{(1)}(BH_n) \leq |S| = 4n-4$, 所以, 1-限制连通度的上界并不能由任一条边的邻点确定, 所以取一条长为 4 的圈, 证明 $\kappa^{(1)}(BH_n)$ 的下界是 $4n-4$, 其证明过程与定理 4 证明过程相同。

引理 5^[21] 任取一个故障边集 $F \in E(BH_n)$, 当 $|F| \leq 4n-5$ 时, 则:

- 1) $BH_n - F$ 连通;
- 2) $BH_n - F$ 包含两部分, 其中一部分是一个孤立点;
- 3) $BH_n - F$ 包含两部分, 这两部分均是孤立点。

定理 4 n 维平衡超立方体 BH_n 的 2-限制连通度 $\kappa^{(2)}(BH_n) = 4n-4$ ($n \geq 2$)。

证明 首先证明 $\kappa^{(2)}(BH_n) \leq 4n-4$, 令 $S = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in BH_{n-1}^{(i)}$, 不失一般性, 取 $S \in BH_{n-1}^{(0)}$, 令 $v_1 = (0, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1})$, $v_2 = (1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1})$, $v_3 = (2, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1})$, $v_4 = (3, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1})$ 。显然由 S 构成的子图 BH_n 上一个长为 4 的圈 C , 则 $C = v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_1$ 。如图 4 所示, $N(v_1) = N(v_3)$, $N(v_2) = N(v_4)$, $N(v_1) \cap N(v_2) = \emptyset$ 和 $N(v_3) \cap N(v_4) = \emptyset$ 。令 $F = N_{BH_n}(S)$, $N_{BH_n}[S] = F \cup S$, 则 $|F| = 4n-4$, $BH_n - F$ 不连通且没有孤立点。

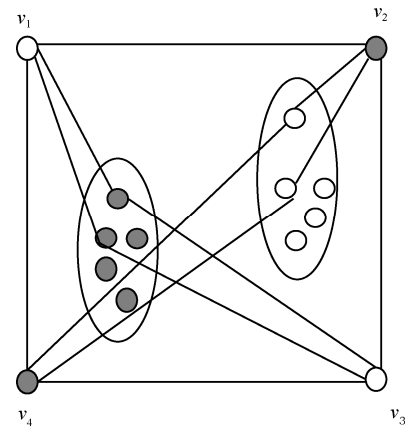


图4 圈 C 的邻边集

要证 F 是 BH_n 的 2-限制点割集, 只需要证明 $H = BH_n - N_{BH_n}[S]$ 中任一点的度数至少为 2。如图 5 所示, 任取 $x \in H$, 由定义 2 可得 x 的外邻点只有 2 个, 所以 x 至多有 2 个邻点在 F 中。因

此当 $n \geq 2$ 时, $|N_H(x)| \geq 2n - 2 \geq 2$, 所以 F 是 BH_n 的 2-限制点割集, 得 $\kappa^{(2)}(BH_n) \leq 4n - 4$ 。

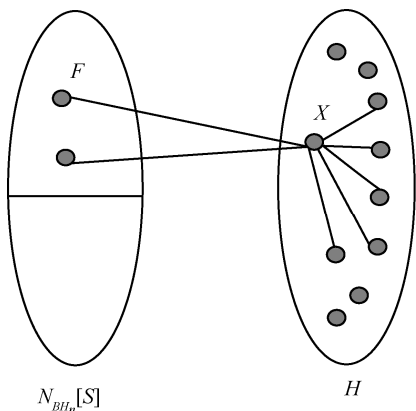


图5 F 是 BH_n 的 2-限制点割

现在证明当 $n \geq 2$ 时, $\kappa^{(2)}(BH_n) \geq 4n - 4$ 。可用反证法证明。由引理 5, 假设 $|F| \leq 4n - 5$, 由于 $\kappa(BH_{n-1}) = 2n - 2$, 设 $I = \{i | BH_{n-1}^{(i)} - F_i \text{ 不连通}\}$, 则对于任意的 $i \in I$, $|F_i| \geq 2n - 2$, 又因为 $|F| = |F_0| + |F_1| + |F_2| + |F_3| \leq 4n - 5$, 有 $|I| \leq 1$ 。分 2 种情况讨论。

1) 当 $|I| = 0$ 时, $BH_{n-1}^{(i)} - F_i$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ 都是连通的, 所以 $BH_n - F$ 是连通的。

2) 当 $|I| = 1$ 时, $BH_{n-1}^{(i)} - F_i$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ 只有一个不连通, 设为 $BH_{n-1}^{(0)} - F_0$, 其余 3 个子图均连通, $BH_{n-1}^{(0)} - F_0$ 包括两部分, 分以下几种情况讨论。

① $BH_{n-1}^{(0)} - F_0$ 其中一部分是一个孤立点, 设为 u_0 , 如图 6 所示, 由于 $|F_0| \geq \kappa(BH_{n-1}) = 2n - 2$, 则 $BH_{n-1}^{(0)} - (F_0 \cup \{u_0\})$ 是连通的。由定义 2 可得, $BH_{n-1}^{(0)} - (F_0 \cup \{u_0\})$ 可以连接到 $BH_{n-1}^{(1)} - F_1$ 或 $BH_{n-1}^{(3)} - F_3$, 否则, 对于任意 $u_1 \in BH_{n-1}^{(1)} - F_1$ 或 $u_3 \in BH_{n-1}^{(3)} - F_3$, 有 $N_{e\{u_1, u_3\}} \in F_0 \cup \{u_0\}$, 由定义 2 得, 每个点的 2 个外邻点是有相同的邻居节点的一个匹配, 得到 $BH_{n-1}^{(0)} - (F_0 \cup \{u_0\})$ 不连通, 产生矛盾。因此可以得到 $BH_n - (F \cup \{u_0\})$ 是连通的, 这与 F 是 2-限制点割矛盾。

② $BH_{n-1}^{(0)} - F_0$ 中有 2 个孤立点 u_0 和 v_0 , 如图 7 所示, 与①同理可得 $BH_{n-1}^{(0)} - (F_0 \cup \{u_0\} \cup \{v_0\})$ 连通, 且连接到 $BH_{n-1}^{(1)} - F_1$ 和 $BH_{n-1}^{(3)} - F_3$, 可得 $BH_n - (F \cup \{u_0\} \cup \{v_0\})$ 是连通的, 与 F 是 2-限制点割矛盾。

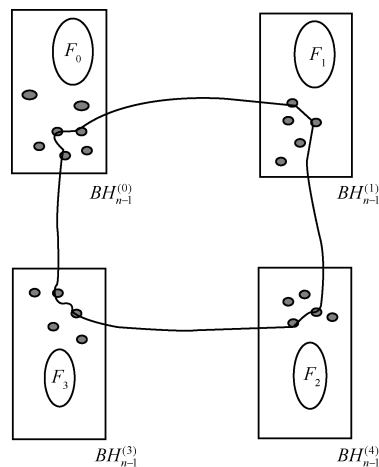


图6 $BH_n - (F \cup \{u_0\})$ 是连通的

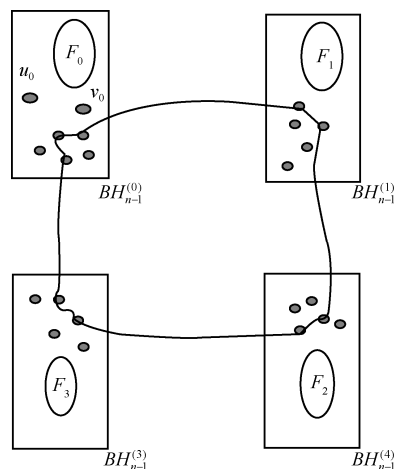


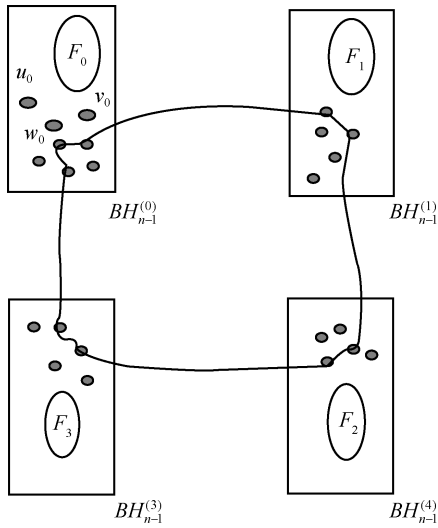
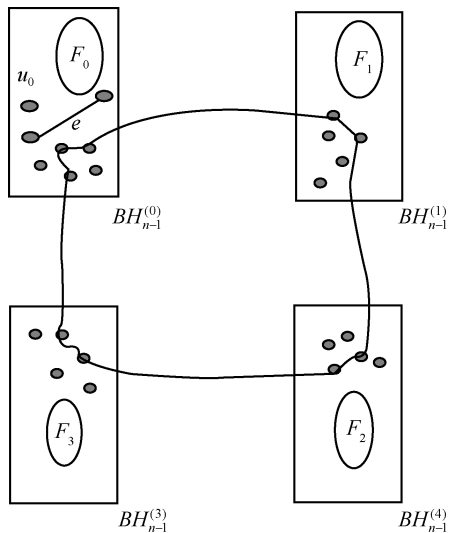
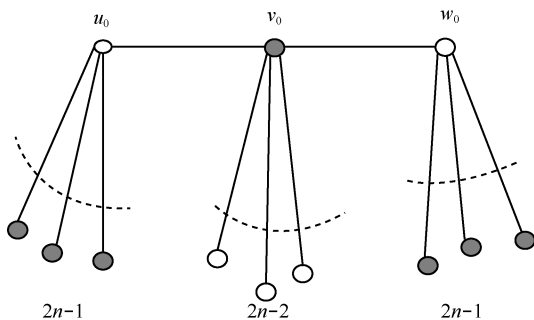
图7 $BH_n - (F \cup \{u_0\} \cup \{v_0\})$ 是连通的

③ $BH_{n-1}^{(0)} - F_0$ 中有 3 个孤立点 u_0 、 v_0 、 w_0 , 如图 8 所示, ①同理可得 $BH_{n-1}^{(0)} - (F_0 \cup \{u_0\} \cup \{v_0\} \cup \{w_0\})$ 连通, 且连接到 $BH_{n-1}^{(1)} - F_1$ 和 $BH_{n-1}^{(3)} - F_3$, 所以 $BH_n - (F \cup \{u_0\} \cup \{v_0\} \cup \{w_0\})$ 是连通的, 与 F 是 2-限制点割矛盾。

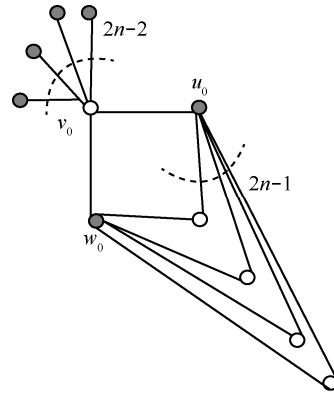
④ $BH_{n-1}^{(0)} - F_0$ 包含是一个孤立点 u_0 和一条孤立边 $e = (u, v)$, 如图 9 所示, 与①同理可得, $BH_{n-1}^{(0)} - (F_0 \cup \{u_0\} \cup \{e\})$ 是连通的, 且连接到 $BH_{n-1}^{(1)} - F_1$ 和 $BH_{n-1}^{(3)} - F_3$, 则同样可以得到 $BH_n - (F \cup \{u_0\} \cup \{e\})$ 连通, 与 F 是 2-限制点割矛盾。

⑤ $BH_{n-1}^{(0)} - F_0$ 其中一部分是一条长为 2 的路, 设为 $P = P(u_0, v_0, w_0) \in BH_{n-1}^{(0)} - F_0$, 根据 BH_n 图形结构, 分为 P 中含匹配点和不含匹配点 2 种情况。

a. 当 P 不含匹配点时, 如图 10 所示, $N_p = 6n - 4$, 当 $n \geq 2$, $N_p > F$, $BH_n - (P \cup F)$ 是连通的。

图8 $BH_{n-1}^{(0)} - (F_0 \cup \{u_0\} \cup \{v_0\} \cup \{w_0\})$ 是连通的图9 $BH_n - (F_0 \cup \{u_0\} \cup \{uv\})$ 是连通的图10 $N_p = 6n - 4$

b. 当 P 包含匹配点时,如图 11 所示, u_0 和 w_0 是一对匹配,此时 $N_p = 4n - 3 > F$, $BH_n - (P \cup F)$ 连通。因此可以得出 $BH_n - (P \cup F)$ 是连通的。与 F 是 2-限制点割矛盾。

图11 $N_p = 4n - 3$

综上所述,当 $n \geq 2$ 时, $\kappa^{(2)}(BH_n) \geq 4n - 4$ 成立。

5 结束语

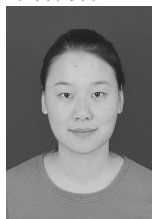
本文研究了平衡超立方体的限制边连通度和限制连通度,提出并证明了 $\lambda^{(1)}(BH_n) = 4n - 2$ 和 $\lambda^{(2)}(BH_n) \leq 8n - 8$, 以及 $\kappa^{(1)}(BH_n) = \kappa^{(2)}(BH_n) = 4n - 4$ ($n \geq 2$)。本文提出的限制边连通度和限制连通度丰富了云计算数据中心网络、复杂网络和无线认知网络中以平衡超立方体为拓扑结构的网络容错性和可靠性的评价体系,同时可被进一步用来提出平衡超立方体的故障诊断算法,以便更好地应用于维护复杂网络的安全可靠性能。

参考文献:

- [1] 包国华, 王生玉, 李运发. 云计算中基于隐私感知的数据安全保护方法研究[J]. 信息安全, 2017(1):84-89.
BAO G H, WANG S Y, LI Y F. Research on privacy aware data security protecting method in cloud computing[J]. Netinfo Security, 2017(1):84-89.
- [2] 周涛, 柏文洁, 汪秉宏, 等. 复杂网络研究概述[J]. 物理, 2005, 34(1): 31-36.
ZHOU T, BAI W J, WANG B H, et al. Overview of complex network Research[J]. PHYSICS, 2005, 34(1): 31-36.
- [3] 滑楠, 曹志刚. 无线认知网络概念与实例研究[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(2): 1-6.
HUA N, CAO Z G. The concept and examples of wireless cognitive Network[J]. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(2): 1-6.
- [4] 徐俊明. 组合网络理论[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
XU J M, Combinatorial theory in networks[M]. Beijing: Science Press, 2007.
- [5] 徐俊明. 图论及其应用[M]. 合肥: 中国科学技术出版社, 2010.
XU J M, Graph Theory with Applications[M]. Hefei: Science and Technology of China Press, 2010.
- [6] XU J M, ZHU Q, XOU X M, et al. On restricted connectivity and

- extra connectivity of hypercubes and folded hypercubes[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University (Science), 2005, 10(2): 203-207.
- [7] LIN L M, XU L, ZHOU S M, et al. The extra, restricted connectivity and conditional diagnosability of split-star networks[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2016, 27(2): 533-545.
- [8] LIN L M, ZHOU S M. Conditional connectivity for (n, k) -arrangement graphs[J]. Journal of Mathematical Study, 2012, 45(4): 350-364.
- [9] 林丽美, 周书明, 许力. 分层立方网络的 t/t -诊断度和诊断算法[J]. 山东大学学报(理学版). 2013, 48(7):85-92.
LIN L M, ZHOU S M, XU L. t/t -diagnosability and diagnosis algorithm for hierarchical cube networks[J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2013,48(7):85-92.
- [10] ZHOU S, CHEN L, XU J M. Conditional fault diagnosability of dual-cubes[J]. International Journal of Foundations of Computer Science, 2012, 23(8): 1729-1748.
- [11] ZHOU S, XU J M. Conditional fault tolerance of arrangement graphs[J]. Inform Process. 2011, 111(21): 1037-1043.
- [12] ZHU Q, XU J M. On restricted edge connectivity and extra edge connectivity of hypercubes and folded hyper cubes[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2006, 36(3): 249-251.
- [13] PAN X F, XU J M, LV M. On restricted connectivity of some cartesian product graphs[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2006, 36(3):237-240.
- [14] 王国亮, 师海忠. 完全对换网络的限制连通度[J]. 运筹学报, 2013, 17(3): 57-64.
WANG G L, SHI H Z. The restricted connectivity of completely switched networks[J]. Operations Research Transactions, 2013, 17(3): 57-64.
- [15] 马强, 梁家荣, 熊茜, 等. 交换交叉网络的可靠性研究[J]. 高技术通讯, 2015, 25(10):919-926.
MA Q, LIANG J R, XIONG Q, et al. Research on reliability of switched cross networks[J]. High Technology Letters, 2015, 25(10): 919-926.
- [16] XU J M, LV M, FAN Y M. The restricted edge-connectivity of de Bruijn undirected graphs[J]. Ars Combinatoria Waterloo then Winnipeg, 2008, 83(1):321-333.
- [17] 徐俊明, 点可迁图的限制边连通度[J]. 数学年刊 A 辑(中文版), 2000, 21(5):266-272.
XU J M. Restricted edge connectivity of vertex transitive graphs[J]. Chinese Annals of Mathematics, Series A, 2000, 21(5):266-272.
- [18] BHUYAN L N, AGRAWAL D P. Generalized hypercube and hypercube structures for a computer network[J]. IEEE Trans Computers, 1984,32(4):323-333.
- [19] WU J, HUANG K. The balanced hypercube: a cube-based system-hemat for fault-tolerant applications[J]. IEEE Transactions Comput, 1997, 46(4): 484-490.
- [20] ZHOU J X, WU Z L, YANG S C, et al. Symmetric proper and reliability of balanced hypercube[J]. IEEE Transactions Comput, 2015, 64(3): 876-881.
- [21] LU H Z. On extra connectivity and extraedge-connectivity of balanced hyper cubes[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2016, 94(4): 813-820.
- [22] YANG M C. Super connectivity of balanced hyper cubes[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 219(3): 970-975

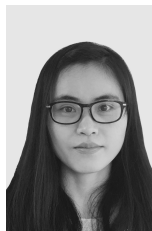
作者简介:



张欣欣(1993-), 女, 河南罗山人, 福建师范大学硕士生, 主要研究方向为网络与信息安全。



许力(1970-), 男, 福建福州人, 博士, 福建师范大学教授、博士生导师, 主要研究方向为网络与信息安全。



林丽美(1988-), 女, 福建莆田人, 博士, 福建农林大学讲师, 主要研究方向为网络与信息安全。